Osservatore ridotto

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

hp $\rho(C) = p$

$\hookrightarrow \exists T : \tilde{C} = CT^{-1} = [I_{p \times p} \ \ 0]$

$\tilde{x} = Tx$ $\quad \tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$

$\tilde{B} = TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$

$$\dot{x}_1 = A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + B_1 u$$
$$\dot{x}_2 = A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + B_2 u$$
$$y = x_1$$

$\rightarrow$ ha senso costruire un osservatore per x_2 (dimensione $n-p$)

Ricostruzione dello stato

$y \rightarrow x_1$ (istantaneamente)

$w \rightarrow x_2$ (asintoticamente)

$$\dot{w} = A_{21} y + A_{22} w + B_2 u$$

copia della dinamica di x_2

+ "correzione tra uscita reale e uscita stimata" (con w al posto di x_2)

"correzione sulle derivate prima dell'uscita"

$$\begin{array}{c} n-p \updownarrow \end{array} \quad + \overset{\overleftrightarrow{p}}{N} \left(\dot{y} - (A_{11} y + A_{12} w + B_1 u) \right)$$

guadagno di osservazione

come la calcolo?

$$e = x_2 - w$$

$$\dot{e} = \dot{x}_2 - \dot{w} = \cancel{A_{21} y} + A_{22} x_2 + \cancel{B_2 u}$$

$$- \cancel{A_{21} y} - A_{22} w - \cancel{B_2 u}$$

$$- N \left[\cancel{A_{11} y} + A_{12} x_2 + \cancel{B_1 u} - \cancel{A_{11} y} - A_{12} w - \cancel{B_1 u} \right]$$

$$= (A_{22} - N A_{12})(x_2 - w) = (A_{22} - N A_{12}) e$$

autovalori sono a parte reale negativa?

$(n-p) \times (n-p)$

Theo

$\exists N$: posso assegnare arbitrariamente gli autovalori di $\underbrace{A_{22}}-N\underbrace{A_{12}}$

$\Updownarrow$

(A, C) è osservabile

Dim

CN&S osservabilità

$$\rho\begin{pmatrix} A-\lambda I \\ \hline C \end{pmatrix} = n$$

$\forall \lambda_i$ (autoval di A)

$$\overbrace{}^{n}$$

$$n+p\left\{ \rho\begin{pmatrix} A_{11}-\lambda I & \boxed{\begin{matrix} A_{12} \\ A_{22}-\lambda I \end{matrix}} \\ A_{21} & \\ \hline \boxed{I} & 0 \end{pmatrix}\right.$$

p col. indip

n-p colonne lin. indip.

(A_{22}, A_{12}) è osservabile $\Leftarrow$ n-p colonne lin. indip.

$\Rightarrow$ N in $A_{22}-NA_{12}$ si sceglie "come" la G in $A-GC$!!

$$\dot{w} = \dots + N(\dot{y} \dots)$$

$w \rightarrow \xi = w - Ny$

$\downarrow$

$\dot{\xi} = \dot{w} \dots - N\dot{y}$ $\Rightarrow w = \xi + Ny$

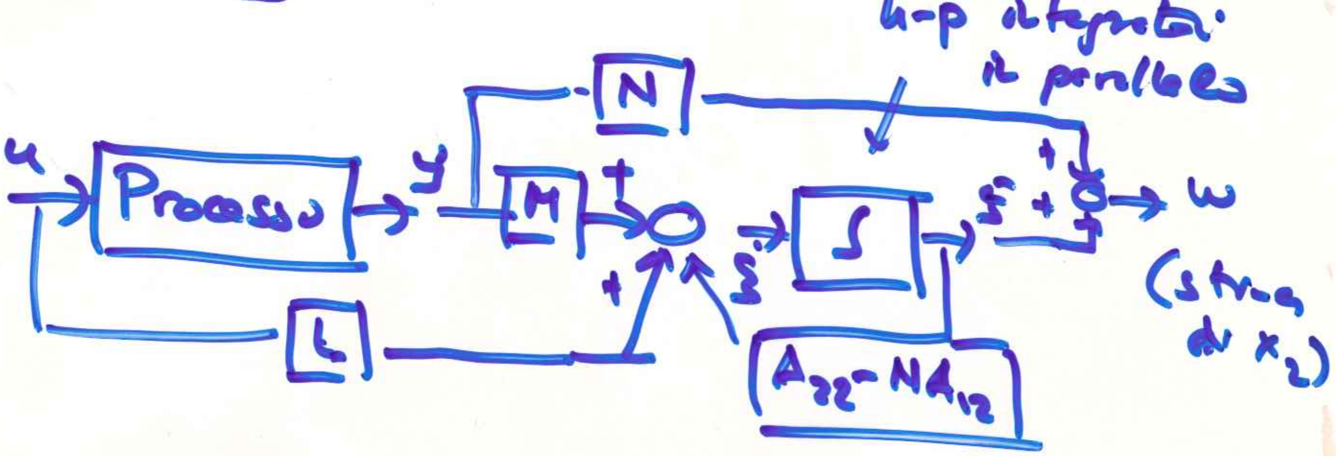
$$\dot{\xi} = \dot{w} - N\dot{y} = A_{21}y + A_{22}w + B_2 u + N(\cancel{\dot{y}} - (A_{11}y + A_{12}w + B_1 u)) - \cancel{N\dot{y}}$$

$$w = \xi + Ny$$

$$= (A_{22} - NA_{12})\xi + \overbrace{(B_2 - NB_1)}^{L}u + \underbrace{(A_{21} + A_{22}N - NA_{11} - NA_{12}N)}_{M}y$$

$\Rightarrow$ eq. finali dell'osservatore ridotto (di x_2)

$$\dot{\xi} = (A_{22} - NA_{12})\xi + Lu + My$$
$$w = \xi + Ny$$



dim ξ = n-p

<u>Nota</u> se $\rho(C) = p_0 < p$ $\quad SCx = \begin{array}{c} p_0 \\ \begin{bmatrix}\tilde{C} \\ 0\end{bmatrix} \end{array} x$

$\Rightarrow$ osservatore di dimensione $n-p_0 > n-p$

Ex d'esame (16.9.96)

$u = 0$

$x = \begin{bmatrix} v \\ z \end{bmatrix}$

$y = v$

l'unico misurabile

$$\dot{v} = -\beta v + \gamma z$$
$$\dot{z} = -\alpha z$$

$\alpha > 0$
$\beta > 0$
$\gamma > 0$

$$A = \begin{bmatrix} -\beta & \gamma \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (n = 2)$$

osservabilità $\rho \begin{pmatrix} c \\ cA \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & \gamma \end{pmatrix} = 2$ iff $\gamma \neq 0$

osservatore ridotto $(w \to z)$

$$\dot{w} = -\alpha w + N(\dot{y} + \beta y - \gamma w)$$

$$\xi = w - Ny$$

$$\dot{\xi} = -\alpha w + N\beta y - N\gamma \overset{\xi + Ny}{w}$$

$$\dot{\xi} = -(\alpha + N\gamma)\,\xi + (N\beta - \alpha N - N^2\gamma)\,y$$

$$w = \xi + Ny$$

asintoticamente al valore vero di z (cell. infette)

$$e = z_2 - w$$

$$\dot{e} = -(\alpha + N\gamma)\,e$$

$$= -(10\alpha)\,e \qquad N = \frac{9\alpha}{\gamma}$$